جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [المحددات]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [الاسم] عدد الوحدات: [الرقم]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري + عملي]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. المحددات ٢

١,١ المحددات الثنائية ٢

١,٢المحددات الثلاثية ٢

١،٣ خواص المحددات ٣

٢. حل المعادلات الخطية بطريقة كرامر ٣

المحددات

تعريف: هو عدد حقيقي نتحصل علية من المصفوفة المربعة وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة ونرمز له $|A|$ او $det(A)$.

١- المحددات الثنائية **:محدد المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي ناقص حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي .**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

تمرين : احسب محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

٢- المحددات الثلاثية**: محدد المصفوفة المربعة 3×3 هو مجموع حواصل ضرب عناصر الاقطارالرئيسية الثلاث ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الاقطار الثانوية الثلاث ونحصل على هذه الاقطار بإعادة كتابة العمود الاول والثاني .**

مثال :

احسب محدد المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix}$$

$$= (1 \times -2 \times 1) + (0 \times 1 \times -2) + (-3 \times 4 \times 0) - (-3 \times -2 \times -2)$$
$$- (1 \times 1 \times 0) - (0 \times 4 \times 1) = -2 + 12 = 10$$

٣- الطريقة العامة **:ويستخدم لإيجاد محدد المصفوفة من الرتبة 3×3 فأكثر بدلالة عناصر الصف او العمود وذلك بتثبيت اشارة (+) ثم (-) بالتناوب لعناصر المصفوفة ثم حذف الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر لنحصل على محددات ثنائية 2×2.**

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & - \\ - & + & - & \cdots & + \\ + & - & + & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ - & + & - & \cdots & + \end{vmatrix}$$

مثال: جد محدد المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= +3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

خواص المحددات

١- اذا كانت المصفوفة مربعة فان $|A| = |A^T|$

٢- محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب محدديهما $|AB| = |A||B|$

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات قاعدة كرامر (Cramer's Rule)

نكتب مصفوفة المعاملات ثم نجد محددها $|D|$ نجد قيم المجاهيل كالاتي:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|}$$

$$,y = \frac{|D_y|}{|D|} \quad , z = \frac{|D_z|}{|D|}$$

مثال : حل باستخدام قاعدة كرامر منظومة المعادلات الآتية:

$$2x + 4y + 6z = 2$$

$$2z + x \qquad = 0$$

$$3y - z + 2x = -5$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , |D| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ - & + & - \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 26$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ - & + & - \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(0)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -52$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ - & + & - \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ - & + & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 26$$

$$x = -2\,, y = 0\,, z = 1$$

تمارين :

١- جد $|AB|$ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\,, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

٢- احسب $|C^T|$ للمصفوفة $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [المصفوفات]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [م.م ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. المصفوفات ٢

١,١ تعاريف ٣

١,٢ انواع المصفوفات ٣

المصفوفات Matrices

تعريف: ان مجموعة mn من الاعداد مرتبة على شكل m من الصفوف و n من الاعمدة تسمى مصفوفة من الرتبة $m \times n$ حيث ان m عدد الصفوف و n عدد الاعمدة .

امثلة :

١- ما هي رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:

رتبة المصفوفة $= m \times n$

عدد صفوف المصفوفة $A = 2$ m

عدد اعمدة المصفوفة $A = 2$ n

اذن A مصفوفة من الرتبة 2×2 .

٢- ماهي رتبة المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

الحل:

رتبة المصفوفة $= m \times n$

عدد صفوف المصفوفة $B = 3$ m

عدد اعمدة المصفوفة $B = 2$ n

اذن B مصفوفة من الرتبة 2×3 .

من الممكن كتابة المصفوفات أعلاه بالشكل $B_{3\times2}$, $A_{2\times2}$.

ملاحظات:

١- كل عدد موجود في المصفوفة $m \times n$ **يسمى عنصرا**

٢- يمكن ترقيم الصفوف من الاعلى الى الاسفل والاعمدة من اليسار الى اليمين فيكون العنصر الواقع في الصف i **والعمود** j **يحمل الرقم** ij **حيث ان** i **رقم الصف و** j **رقم العمود.**

مثال: **حدد مواقع العناصر في المصفوفة**

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

صف اول عمود اول $6 = a_{ij} = a_{11}$

صف اول عمود ثاني $1 = a_{ij} = a_{12}$

صف اول عمود ثالث $2 = a_{ij} = a_{13}$

صف ثاني عمود اول $9 = a_{ij} = a_{21}$

صف ثاني عمود ثاني $3 = a_{ij} = a_{22}$

صف ثاني عمود ثالث $8 = a_{ij} = a_{23}$

تعريف: العناصر a_{ij} **في المصفوفة** A **حيث** $i = j$ **تسمى عناصر القطر الرئيسي والمستقيم الذي تقع علية العناصر يسمى بالقطر الرئيسي .**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

عناصر القطر الرئيسي هي $(10 = a_{22}, 5 = a_{11},)$

تعريف : عند تبديل صفوف المصفوفة A **بأعمدتها تسمى المصفوفة الناتجة بمدور المصفوفة او منقول المصفوفة** ***(transpose matrix)*** **ونرمز لها** A^T **.مثلا** $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad D^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

انواع المصفوفات

١- **تعريف: تسمى المصفوفة** $m \times n$ **مربعة** ***(square matrix)*** $m=n$.
مثلا مصفوفة من الرتبة $3 \times 3, 2 \times 2$**....الخ.**

٢- **تعريف : تسمى المصفوفة المربعة قطرية** ***(diagonal matrix)*** **اذا كانت جميع عناصرها اصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي .**

مثلا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **او** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

٣- ***تسمى المصفوفة بمصفوفة الوحدة اذا كانت كل من عناصر قطرها الرئيسي تساوي واحد .***

مثلا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **او** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٤- تعريف: تسمى المصفوفة المربعة متناظرة *(symmetric matrix)* اذا كانت $A = A^T$.

مثال:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اذن C مصفوفة متناظرة .

٥- المصفوفات المثلثية *Triangular Matrices*

ا- تسمى المصفوفة مثلثية عليا *(upper triangular matrix)* اذا كانت العناصر التي تقع في رقم صف اكبر من رقم العمود $i > j$ تساوي صفر .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ب- تسمى المصفوفة المثلثية سفلى *(lower triangular matrix)* اذا كانت العناصر التي تقع في رقم الصف اصغر من رقم العمود $i < j$ تساوي صفر

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

تمارين :

١- احسب منقول المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

٢- هل المصفوفة متناظرة $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

٣- ما هو نوع المصفوفة التالية $H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [المتطابقات والمعادلات المثلثية]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. المتطابقات والمعادلات المثلثية ٢

١,١ الدوال والعلاقات المثلثية ٢

١,٢ الزوايا في الارباع الاربعة ٢

١,٣ قوانين الجمع والطرح ٣

١،٤ قوانين ضعف الزاوية ونصف الزاوية ٣

الدوال والعلاقات المثلثية

مقلوب الدوال المثلثية الأساسية

تعتبر هذه العلاقات هي حجر الزاوية في حساب المثلثات:

- ✓ $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$
- ✓ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$
- ✓ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

الزوايا في الأرباع الأربعة والتحويلات

تتغير إشارات الدوال وقيمها بناءً على الربع الذي تقع فيه الزاوية θ:

❖ **الربع الأول** $0 < \theta < 90$

✓ **جميع الدوال المثلثية (Sin, Cos, Tan) موجبة.**

❖ **الربع الثاني** $90 < \theta < 180$

- ✓ $\sin(180 - \theta) = \sin\theta$ **(موجب)**
- ✓ $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$ **(سالب)**
- ✓ $\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$ **(سالب)**
- ✓ *تحويلات بديلة:* $\sin(90 + \theta) = \cos\theta \mid \cos(90 + \theta) = -\sin\theta$

❖ **الربع الثالث (**$180 < \theta < 270$

- ✓ $\sin(180 + \theta) = -\sin\theta$ **(سالب)**
- ✓ $\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$ **(سالب)**
- ✓ $\tan(180 + \theta) = \tan\theta$ **(موجب)**

❖ **الربع الرابع (**$270 < \theta < 360$

- ✓ $\sin(360 - \theta) = -\sin\theta$ **(سالب)**
- ✓ $\cos(360 - \theta) = \cos\theta$ **(موجب)**
- ✓ $\tan(360 - \theta) = -\tan\theta$ **(سالب)**

متطابقات فيثاغورس

مستنتجة من العلاقة الأساسية للدائرة : $AB^2 = AC^2 + BC^2$

- ✓ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- ✓ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
- ✓ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

قوانين الجمع والطرح لزاويتين

- ✓ $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
- ✓ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- ✓ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

قوانين ضعف ونصف الزاوية

ضعف الزاوية (Double Angle):

- ✓ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- ✓ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  - *صيغة بديلة:* $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
  - *صيغة بديلة:* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- ✓ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

نصف الزاوية (Half Angle):

- ✓ $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
- ✓ $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

تمارين وأمثلة تطبيقية

مثال (١): أوجد قيمة $\sin 300^\circ$

الحل: بما أن الزاوية في الربع الرابع:

$$\sin(360 - 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (٢): أوجد قيمة $\cos 225^\circ$

الحل: بما أن الزاوية في الربع الثالث:

$$\cos(180 + 45) = -\cos 45 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [الغايات]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [م.م ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. الغايات ٢

١,١ حالات عدم التعيين ٣

الغايات limits

غاية الدالة هي البحث عن قيمة تقترب اليها $f(x)$ عندما تقترب x من a .

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{حيث ان} \quad f(x) \to b, x \to a$$

مثال :احسب $\lim_{x\to -2}(6x^3 + 3x^2)$

$$\lim_{x\to -2} 6x^3 + \lim_{x\to -2} 3x^2 = 6(-2)^3 + 3(-2)^2 = -36$$

مثال: لتكن $F(x) = (-2x^3 - 1)(5x^2 + 1)$ فأوجد $\lim_{x\to -1} F(x)$

$$= \lim_{x\to -1}(-2x^3 - 1) \lim_{x\to -1}(5x^2 + 1)$$

$$= (-2(-1)^3 - 1)(5(-1)^2 + 1) = 6$$

ملاحظات:

١- الغاية من اليسار هي غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x الى a من جهة اليسار اي بقيم اصغر منها $\lim_{x\to a^-} f(x)$ حيث $x < a$.

٢- الغاية من اليمين هي غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x الى a من جهة اليمين اي بقيم اكبر منها $\lim_{x\to a^+} f(x)$ حيث $x > a$.

٣- اذا كانت الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار فان الغاية موجودة.

مثال: اوجد $\lim_{x\to 3} f(x)$ عندما

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \le 3 \\ \sqrt{x + 13}, & x > 3 \end{cases}$$

الحل:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 - 5 = (3)^2 - 5 = 9 = 5 = 4$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to 3} \sqrt{x + 13} = \sqrt{3 + 13} = \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} x^2 - 5 = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x + 13}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

الغاية موجودة .

حالة عدم التعيين

عندما تكون النتائج بالشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,$(\infty \cdot \infty)$,$(0 \cdot \infty)$يجب ازالة حالة عدم التعيين وذلك بالتحليل او قسمة البسط على المقام او الاختصار او القيام بعملية طرح او جمع او باستعمال طرق اخرى.

مثال:

أوجد $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

الحـــل

عندما التعويض عن $x = 1$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

ولكن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

نحاول طريقة أخرى للحل.

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

ملاحظات :

١- عندما $x \to \infty$ نقسم البسط والمقام على المتغير حامل اعلى اس في المقام .

٢- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ، n عدد موجب.

٣- $\infty + \infty = \infty$

٤- $c + \infty = \infty$، cثابت

٥- $c \cdot \infty = \infty$، cثابت

مثال: احسب غاية الدالة $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3}$

الحل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\infty + 5}{x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1}$$

حسب ملاحظة رقم 2

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}1}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{1}=\frac{0+0}{1}=0$$

تمارين : احسب غاية كل مما يأتي

١- $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$

٢- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+2}$

٣- $\lim_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}$

٤- $\lim_{t\to0} g(t)$ **اذا كانت** $g(\mathrm{t})=\begin{cases}\mathrm{t}^2, & \mathrm{t}\geq0\\ \mathrm{t}-2, & \mathrm{t}<0\end{cases}$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [المتجهات]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. المتجهات ٢

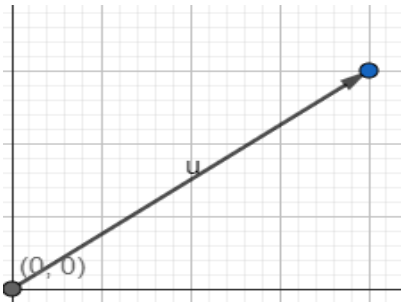
١,١ عمليات على المتجهات ٢

١,٢ طول او معيار المتجه..... ٢

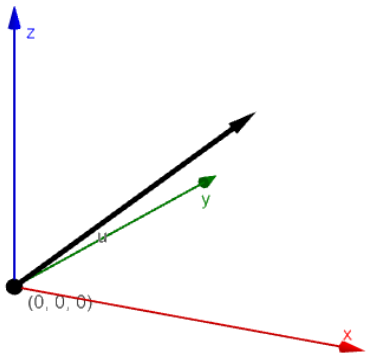
١,٣ الضرب العددي النقطي ٤

١،٤ الضرب الاتجاهي ٥

المتجهات Vectors



تعريف : اذا كان u متجه في المستوي xy ونقطة بدايته هي نقطة الاصل ونقطة نهايته هي (u_1, u_2) يطلق على الاحداثيات u_1, u_2 بمركبات المتجة ويكتب بالشكل $\vec{u} = (u_1, u_2)$.



تعريف : اذا كان u متجة في المستوي xyz ونقطة بدايته هي نقطة الاصل ونقطة نهايته هي (u_1, u_2, u_3) يطلق على الاحداثيات u_1, u_2, u_3 بمركبات المتجه ويكتب بالشكل $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

عمليات على المتجهات : يمكن اجراء عمليات جمع وطرح او ضرب المتجهات بعدد بواسطة المركبات كالآتي:

1- $\vec{u} \mp \vec{v} = (u_1 \mp v_1, u_2 \mp v_2, u_3 \mp v_3\ )$
2- $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$

وبنفس الطريقة على المستوي xy.

طول او معيار المتجه : يمكن حساب طول المتجه والذي يرمز له $\|\vec{u}\|$ بالشكل التالي:

1- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

2- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

تمرين : أحسب معيار $\vec{v} = (3,4)$

مثال : اذا علمت $\vec{w} = (3,2,-1)$ ، $\vec{v} = (2,-3,1)$ ، $\vec{u} = (1,2,3)$ جد :

1- $2\vec{v} - (\vec{u} + \vec{w})$

الحل : $=2(2,-3,1) - \big((1,2,3) + (3,2,-1)\big) = (0,-10,0)$

2- $7\vec{v} + 3\vec{w}$

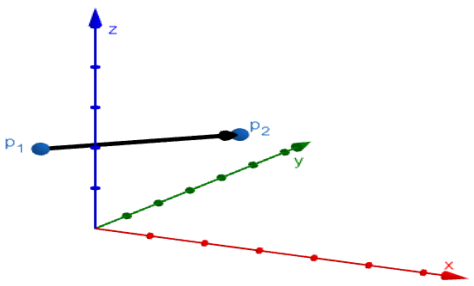
الحل: $=7(2,-3,1) + 3(3,2,-1) = (23,-15,4)$

ملاحظة :اذا كانت نقطة بداية المتجه $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ونقطة نهاية $p_2(x_2,y_2,z_2)$ بحيث

$$\overrightarrow{p_1p_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

فأن المسافة بين النقطتين p_1 و p_2 هي معيار المتجة $\overrightarrow{p_1p_2}$

المسافة $d = \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



تمرين : جد المسافة بين $p_1 = (8,-4,2)$ و $p_2 = (-6,-1,0)$

الضرب العددي النقطي Dot product

تعريف : اذا كان $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ متجهين فأن الضرب العددي او النقطي لهما هو

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3)$$

مثال : جد الضرب العددي او النقطي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ عندما $\vec{u} = (8, -2, -2)$ و $\vec{v} = (1, -3, 7)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \big(1.8 + (-3).(-2) + 7.(-2)\big) = 8 + 6 - 14 = 0$$

ملاحظات :

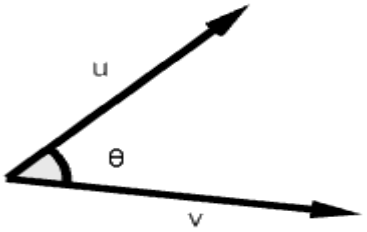
١- الضرب النقطي كمية عددية.

٢- يكون المتجهين $\vec{v}, \vec{u}$ متعامدين اذا وفقط اذا كان الضرب العددي لهما يساوي صفر .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0 \ , \vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$$

٣- اذا كان $\vec{v}, \vec{u}$ متجهين و θ الزاوية المحصورة بينهما فان الضرب النقطي لهما هو

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \ , 0 \leq \theta \leq \pi$$



مثال: جد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{v} = (6, 3, 2), \vec{u} = (1, -2, -2)$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \ ,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2, -2) \cdot (6, 3, 2) = (1.6 + (-2).3 + (-2).2) = -4$$

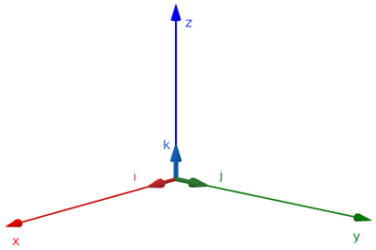
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad ,$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{21}\right)$$

المتجهات الواحدية الاعتيادية (i ,j)

هي متجهات باتجاه محاور الاحداثيات وطول كل منهما يساوي واحد .



$$k = (0,0,1) \qquad j = (0,1,0) \qquad i = (1,0,0)$$

حيث يمكن كتابة اي متجه بدلالتها $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ يكتب

$$\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

الضرب الاتجاهي Cross product

تعريف : اذا كان $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ و $\vec{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ فان الضرب الاتجاهي لهما

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال: ليكن لدينا $\vec{u} = i + 3j - 2k$ و $\vec{v} = 3i + 4k$ جد $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12i - 10j - 9k$$

ملاحظات :

١- نتيجة الضرب الاتجاهي هو متجه اخر.
٢- المتجه $\vec{u} \times \vec{v}$ عمودي على كل من المتجهين $\vec{v}, \vec{u}$.
٣- معيار او طول المتجه $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ يساوي مساحة متوازي الاضلاع المتحدد بالمتجهين $\vec{u}$, $\vec{v}$.

مثال : اذا كان لدينا المتجهات الاتية :

$$\vec{u} = i + 2j - k$$

$$\vec{v} = -2i + 2j + 2k$$

جـــد ١) $\vec{u} \times \vec{v}$ ٢)مساحة المثلث

الحل:

1) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{matrix} = (4i + 2j + 2k) - (-4k - 2i + 2j) = 6i + 6k$

2) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

مساحة متوازي الاضلاع=(الارتفاع × القاعدة)=$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$

$\triangle = \frac{1}{2}$(الارتفاع × القاعدة) $= \frac{1}{2}\ 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [الاعداد المركبة]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [م.م ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. العلاقة بين الصيغة العامة والقطبية ..... **خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.**

١,١ تحديد الاشارة حسب الربع ..... **خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.**

الأعداد المركبة (Complex Numbers)

العلاقة بين الصيغتين العامة والقطبية

للتحويل من الإحداثيات المتعامدة (x, y) إلى القطبية (r, θ)، نستخدم القوانين التالية:

١. **الطول (المقياس):**

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

٢. **الزاوية (السعة):**

$$\theta = \tan^{-1}(\tfrac{y}{x})$$

للتحويل العكسي (من قطبي إلى عام):

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$

تحديد الزاوية حسب الربع (إشارات المحاور)

تعتمد الزاوية النهائية θ على موقع العدد المركب في المستوى ، حيث نجد زاوية الإسناد β أولاً، ثم نحدد θ كالتالي:

١. **الربع الأول :** $(+x, +y)$

الزاوية تبقى كما هي: $\theta = \beta$

٢. **الربع الثاني :** $(-x, +y)$

الزاوية: $\theta = 180^\circ - \beta$

٣. **الربع الثالث :** $(-x, -y)$

الزاوية: $\theta = 180^\circ + \beta$

٤. **الربع الرابع :** $(+x, -y)$

الزاوية: $\theta = 360^\circ - \beta$

مثال (١): الربع الأول

السؤال: حول $Z = 3 + 4i$ إلى الصيغة القطبية.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}(4/3) = 53.13^\circ$$
$$Z = 5\angle 53.13^\circ$$

مثال (٢): حول $Z = -6 + 3i$ إلى الصيغة القطبية.

$$r = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$
$$\beta = \tan^{-1}(3/6) = 26.57^\circ$$
$$\theta = 180^\circ - 26.57^\circ = 153.43^\circ$$

بما أنه في الربع الثاني

$$Z = \sqrt{45}\angle 153.43^\circ$$

مثال (٣): حول $Z = 2\angle 88^\circ$ إلى الصيغة العامة.

$$x = 2\cos 88^\circ = 0.0697$$
$$y = 2\sin 88^\circ \approx 2$$
$$Z = 0.0697 + 2i$$

تمارين:

١. **اكتب الأعداد التالية بالصيغة القطبية:**
   - $Z = 1 + i$
   - $Z = -1 + i$
   - $Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$
٢. **اكتب الأعداد التالية بالصيغة العامة:**
   - $Z = 2\angle 45^\circ$
   - $Z = 4\angle 120^\circ$
   - $Z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [الاسس واللوغاريتمات وقوانينها]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. الاسس واللوغاريتمات..... ٢

١,١ قوانين الاسس..... ٢

١,٢ قوانين اللوغاريتمات..... ٢

الأسس واللوغاريتمات

القوانين والتطبيقات الجبرية

تُعد الأسس واللوغاريتمات من الأدوات الرياضية الجوهرية لتبسيط العمليات الحسابية المتكررة والمعقدة. يعتمد فهم اللوغاريتمات بشكل كلي على استيعاب قوانين الأسس، حيث يمثل اللوغاريتم العملية العكسية للرفع إلى قوة.

أولاً: قوانين الأسس (Laws of Exponents)

تستخدم الأسس لاختصار عملية الضرب المتكرر لنفس العدد. إليك أهم القوانين التي تحكمها:

١) **قانون الضرب: عند ضرب أساسات متشابهة، نجمع الأسس.**

- ***القاعدة:*** $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

٢) **قانون القسمة: عند قسمة أساسات متشابهة، نطرح الأسس.**

- ***القاعدة:*** $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$

٣) **قانون الرفع: عند رفع قوة لقوة أخرى، نضرب الأسس.**

- ***القاعدة:*** $(A^m)^n = A^{m \cdot n}$

٤) **قانون الأسس الكسرية (الجذور):**

- ***القاعدة:*** $A^{1/n} = \sqrt[n]{A}$

ثانياً: تعريف وقوانين اللوغاريتمات

اللوغاريتم للأساس b للعدد x هو الأس y الذي يجب رفع الأساس b إليه للحصول على x.

- ***الصيغة:*** $b^y = x \iff y = \log_b x$

١) قوانين اللوغاريتمات الأساسية

- **قانون الضرب: يتحول الضرب داخل اللوغاريتم إلى جمع.**
  - $\log(xy) = \log x + \log y$
- **قانون القسمة: تتحول القسمة داخل اللوغاريتم إلى طرح.**
  - $\log(x/y) = \log x - \log y$
- **قانون القوى: يخرج الأس خارج اللوغاريتم كمعامل ضرب.**
  - $\log x^n = n \log x$

٢) قيم لوغاريتمية هامة (للأساس ١٠)

- $\log 10 = 1$
- $\log 100 = 2$
- $\log 1 = 0$

- $\log 0.1 = -1$

مثال : حساب قيمة لوغاريتم مركب

أوجد قيمة $\log 6$ **إذا علمت أن** $\log 2 = 0.301$ **و** $\log 3 = 0.4771$.

الحل:

بما أن $6 = 2 \times 3$

إذن $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3$

التعويض $0.301 + 0.4771 = 0.7781$

ثالثاً: اللوغاريتم الطبيعي (Natural Logarithm)

يرمز له بالرمز (ln) وأساسه هو الرقم النيبيري $e \approx 2.718$.

- **العلاقة باللوغاريتم العشري:** $\ln(x) \approx 2.3 \log_{10}(x)$

جامعة الفرات الأوسط التقنية

المعهد التقني بابل

قسم التقنيات الإلكترونية

عنوان المحاضرة: [الاعداد المركبة]

المادة: [الرياضيات]

أستاذ المادة: [م. م ايمان جواد ناجي] عدد الوحدات: [٤]

التاريخ: ١٦-٠٣-٢٠٢٦ الساعات: [نظري]

جدول المحتويات (الفهرس)

١. التحويلات بين الصيغ الرياضية ٢

٢. العلاقة بين الاحداثيات المتعامدة والقطبية ٢

الأعداد المركبة (Complex Numbers)

التحويلات بين الصيغ الرياضية

تعتبر التحويلات بين الصيغ المختلفة للأعداد المركبة مهارة أساسية في الهندسة والفيزياء، حيث تسهل بعض الصيغ عملية الجمع والطرح، بينما تسهل صيغ أخرى عمليات الضرب والقسمة والرفع لقوى.

الأشكال الأربعة للتمثيل الرياضي

يتم تمثيل العدد المركب غير الصفرية ($Z = x + iy$) بأربع صيغ أساسية:

١) **صيغة المحاور المتعامدة (Rectangular Form):**

تسمى أيضاً الصيغة العامة، وهي:

$$Z = x + iy$$

٢) **الصيغة المثلثية (Triangular Form):**

تعتمد على الزاوية وطول المتجه:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

٣) **الصيغة الأسية (Exponential Form):**

تُعرف أيضاً بصيغة أويلر:

$$Z = re^{i\theta}$$

٤) **الصيغة القطبية (Polar Form):**

وهي الصيغة الأكثر استخداماً في الهندسة الكهربائية:

$$Z = r\angle\theta$$

العلاقة بين الإحداثيات المتعامدة والقطبية

للتحويل من الصيغة العامة (x, y) إلى الصيغة القطبية (r, θ)، نستخدم العلاقات المستمدة من المثلث قائم الزاوية في مستوى أرجاند:

١. **حساب المقياس r**

يمثل نصف قطر المتجه أو طول العدد المركب.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

٢. **حساب السعة الزاوية θ**

هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع المحور الحقيقي الموجب.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

للتحويل العكسي (من قطبي إلى متعامد):

نستخرج قيم x و y بدلالة r و θ :

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$

مثال (١): حول العدد $Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ إلى الصيغة القطبية.

خطوات الحل:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8}$$

حساب زاوية الإسناد β

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

بما ان سالب x و y سالب فان العدد في الربع الثالث

حساب الزاوية النهائية θ

$$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

النتيجة النهائية:

$$Z = \sqrt{8}\angle 210^\circ$$

مثال (٢): حول $Z = 2\angle 88^\circ$ إلى الصيغة العامة.

خطوات الحل:

نحدد الربع الزاوية 88° تقع في الربع الأول.

نحسب x: $x = 2\cos 88^\circ \approx 0.0697$

نحسب y: $y = 2\sin 88^\circ \approx 2$

النتيجة النهائية:

$$Z = 0.0697 + 2i$$

حالات خاصة (الإشارة السالبة في القطبية)

إذا كانت الصيغة القطبية مسبوقة بإشارة سالب ($-r\angle\theta$)، نقوم بتحويلها إلى قيمة موجبة بإضافة أو طرح 180° من الزاوية:

القانون: $-r\angle\theta = r\angle(\theta \pm 180^\circ)$

مثال:

$$-4\angle 60^\circ = 4\angle(60^\circ + 180^\circ) = 4\angle 240^\circ$$

تمارين :

١. **حول الأعداد التالية إلى الصيغة القطبية:**
   - $z = 1 + i$
   - $z = -1 + i$
٢. **حول الأعداد التالية إلى الصيغة العامة:**
   - $z = 4\angle 120^\circ$
   - $z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$