1-3 المحددات (Determinants)

يعرف المحدد بأنه مجموعة عناصر تكتب على شكل صفوف وأعمدة مربعة الأبعاد (عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة) محصورة بين مستقيمين | | ولكل محدد توجد قيمة ثابتة كما مبين في المحدد $|A|$.

$$Det\ A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

2-3 المحددات من المرتبة الثانية (Determinants of the Second Order)

يتكون محدد المرتبة الثانية من صفين وعمودين حيث يتم الحصول على القيمة العددية للمحدد عن طريق حاصل ضرب القطر الأول (a_1b_2) مطروحاً منه حاصل ضرب القطر الثاني (a_2b_1) كما مبين في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

مثال: جد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -3\times 6 - (-2\times 4) = -18 + 8 = -10$$

مثال: اوجد قيم x إذا كان $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x\times x - 1\times 4 = 0$$

(1) $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

أما $(x-2) = 0 \Rightarrow \therefore\ x = 2$

أو $(x+2) = 0 \Rightarrow \therefore\ x = -2$

(2) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \mp 2$

3-3 المحددات من المرتبة الثالثة (Determinants of the Third Order)

لإيجاد قيمة المحدد من المرتبة الثالثة يجب ملاحظة قانون الإشارات (+ − +) لعناصر الصف الأول من المحدد بغض النظر عن إشارة العنصر نفسه حيث يتم تحويل المحدد إلى ثلاث محددات من المرتبة الثانية مع تطبيق طريقة إيجاد المحدد من المرتبة الثانية كما موضح في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

مثال: جد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-7+36) - 3(35-18) - 4(-30+3) = 115$$

مثال: أوجد قيمة x التي تحقق المحدد $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$.

$$-1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1(2x+6) + 2(2x+5) + 4(12-10) = 0$$

$$-2x - 6 + 4x + 10 + 8 = 0$$

$$2x + 12 = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -\frac{12}{2} = -6$$

4-3 حل المعادلات الخطية ذات المتغيرين بإستخدام المحددات (قاعدة كريمر)

لحل المعادلات الخطية ذات المتغيرين (المجهولين) نتبع الخطوات التالية:

$$a_1x + b_1y = d_1$$
$$a_2x + b_2y = d_2$$

1- نصفر المعادلات الخطية عندما تكون غير مصفرة.

$$a_1x + b_1y - d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y - d_2 = 0$$

2- لإيجاد قيمة المتغيرين (x, y) نطبق القانون التالي:

$$\frac{x}{D_1} = \frac{-y}{D_2} = \frac{1}{D_o}$$

$D_1 =$ محدد يشمل عوامل المتغير y والثوابت.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & -d_1 \\ b_2 & -d_2 \end{vmatrix}$$

$D_2 =$ محدد يشمل عوامل المتغير x والثوابت.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -d_1 \\ a_2 & -d_2 \end{vmatrix}$$

$D_o =$ محدد يشمل عوامل المتغيرين(x,y).

$$D_o = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مثال: بإستخدام المحددات حل المعادلات الخطية التالية:

$$5x+2y+19=0$$
$$3x+4y+17=0$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{1}{D_o}$$

$$D_o=\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=20-6=14$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 19\\4 & 17\end{vmatrix}=34-76=-42$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5 & 19\\3 & 17\end{vmatrix}=85-57=28$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{1}{D_o}\Rightarrow\frac{x}{-42}=\frac{1}{14}\Rightarrow 14x=-42\Rightarrow x=\frac{-42}{14}=-3$$

$$\frac{-y}{D_2}=\frac{1}{D_o}\Rightarrow\frac{-y}{28}=\frac{1}{14}\Rightarrow -14y=28\Rightarrow y=-\frac{28}{14}=-2$$

مثال: بإستخدام قاعدة كريمر أوجد قيمة (x,y) من المعادلات الخطية التالية:

$$2x-3y=0$$
$$3x-2y=-5$$
$$2x-3y=0$$
$$3x-2y+5=0$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{1}{D_o}$$

$$D_o=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & -2\end{vmatrix}=-4+9=5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-3 & 0\\-2 & 5\end{vmatrix}=-15+0=-15$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 5\end{vmatrix}=10-0=10$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{1}{D_o}\Rightarrow\frac{x}{-15}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5x=-15\Rightarrow x=-\frac{15}{5}=-3$$

$$\frac{-y}{D_2}=\frac{1}{D_o}\Rightarrow\frac{-y}{10}=\frac{1}{5}\Rightarrow -5y=10\Rightarrow y=-\frac{10}{5}=-2$$

5-3 حل المعادلات الخطية ذات ثلاث متغيرات بإستخدام المحددات (قاعدة كريمر)

لحل المعادلات الخطية ذات ثلاث متغيرات نتبع الخطوات التالية:

1- نصفر المعادلات الخطية عندما تكون غير مصفرة.

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$
$$a_1x+b_1y+c_1z-d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z-d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z-d_3=0$$

2- لإيجاد قيمة (x,y,z) نطبق القانون التالي:

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}$$

$D_1 =$ محدد يشمل عوامل المتغيرات (y,z) والثوابت.

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & -d_1 \\ b_2 & c_2 & -d_2 \\ b_3 & c_3 & -d_3 \end{vmatrix}$$

$D_2 =$ محدد يشمل عوامل المتغيرات (x,z) والثوابت.

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & c_3 & -d_3 \end{vmatrix}$$

$D_3 =$ محدد يشمل عوامل المتغيرات (x,y) والثوابت.

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & -d_3 \end{vmatrix}$$

$D_o =$ محدد يشمل عوامل المتغيرات (x,y,z) .

$$D_o=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال: بإستخدام المحددات أوجد قيمة (x,y,z) من المعادلات الخطية التالية: $-x+2y-z=1$

$$-2x+z=0$$

$$x-y=-1$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}$$

$$-x+2y-z-1=0$$

$$-2x+z=0$$

$$x-y+1=0$$

$$D_o=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-1(0+1)-2(0-1)-1(2-0)=-1+2-2=-1$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2(1-0)+1(0+0)-1(0+1)=2+0-1=1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1(1-0) + 1(-2-0) - 1(0-1) = -1-2+1 = -2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(0+0) - 2(-2-0) - 1(2-0) = 0+4-2 = 2$$

$$\frac{x}{D_1} = \frac{-1}{D_o} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{-y}{D_2} = \frac{-1}{D_o} \Rightarrow \frac{-y}{-2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{z}{D_3} = \frac{-1}{D_o} \Rightarrow \frac{z}{2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow z = 2$$