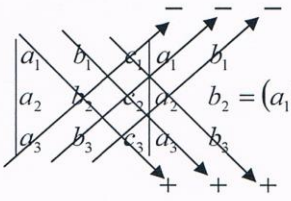
6-3 طريقة الأسهم لإيجاد قيمة المحددات من المرتبة الثالثة

الطريقة الثانية لإيجاد قيمة المحدد الثلاثي فقط ولا تصح هذه الطريقة للمحددات من المراتب الأخرى حيث تعتمد هذه الطريقة الخطوات التالية:

1- نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب إلى يمين المحدد.

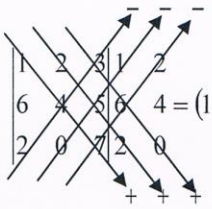
2- نمرر أسهم سالبة إلى الأعلى وأسهم موجبة إلى الأسفل تمر بأقطار المحدد.

3- إيجاد مجموع نتائج ضرب أقطار المحدد كما مبين في المثال التالي:



$$b_2 = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (c_1b_2a_3 + a_1c_2b_3 + b_1a_2c_3)$$

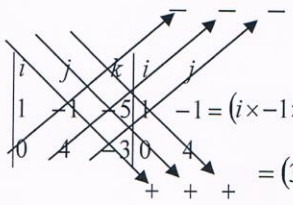
مثال: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.



$$4 = (1\times4\times7 + 2\times5\times2 + 3\times6\times0) - (2\times4\times3 + 0\times5\times1 + 7\times6\times2)$$

$$= (28 + 20 + 0) - (24 + 0 + 84) = 48 - 108 = -60$$

مثال: إثبت أن: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 23i + 3j + 4k$.



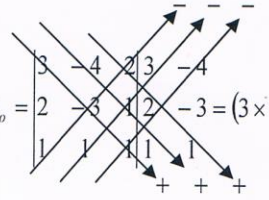
$$-1 = (i \times -1 \times -3 + j \times -5 \times 0 + k \times 1 \times 4) - (0 \times -1 \times k + 4 \times -5 \times i + (-3) \times 1 \times j)$$

$$= (3i + 4k) - (-20i - 3j) = 3i + 4k + 20i + 3j = 23i + 3j + 4k$$

مثال: بإستخدام قاعدة كريمر أوجد قيمة (y) من المعادلات الخطية التالية:

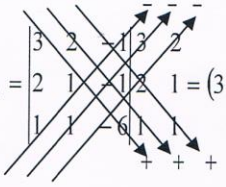
$$3x - 4y + 2z - 1 = 0$$
$$2x - 3y + z - 1 = 0$$
$$x + y + z - 6 = 0$$

$$\frac{x}{D_1} = \frac{-y}{D_2} = \frac{z}{D_3} = \frac{-1}{D_o}$$



$$D_o = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times -3 \times 1 + (-4) \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1) - (1 \times -3 \times 2 + 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 2 \times -4)$$

$$= (-9 - 4 + 4) - (-6 + 3 - 8) = -9 + 11 = 2$$



$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (3 \times 1 \times -6 + 2 \times -1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 1) - (1 \times 1 \times -1 + 1 \times -1 \times 3 + (-6) \times 2 \times 2)$$

$$= (-18 - 2 - 2) - (-1 - 3 - 24) = -22 + 28 = 6$$

$$\frac{-y}{D_2} = \frac{-1}{D_o} \Rightarrow -2y = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{-2} = 3$$

3- 7 تطابق (تواؤم) المعادلات الخطية ذات المتغيرين

يقال أن المعادلات الخطية متطابقة (متوافقة) عندما قيمة المحدد تكون مساوية إلى الصفر.

مثال: إختبر تطابق المعادلات الخطية التالية:

$$2x + y - 5 = 0$$
$$x + 4y + 1 = 0$$
$$3x - y - 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-40 + 1) - 1(-10 - 3) - 5(-1 - 12) = -78 + 13 + 65 = 0$$

∴ المعادلات الخطية متطابقة.

مثال: أوجد قيمة (k) التي تجعل المعادلات الخطية التالية متطابقة:

$$3x+y+2=0$$
$$4x+2y-k=0$$
$$2x-y+3k=0$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & -k\\ 2 & -1 & 3k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3\begin{vmatrix}2 & -k\\ -1 & 3k\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}4 & -k\\ 2 & 3k\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0$$
$$3(6k-k)-1(12k+2k)+2(-4-4)=0$$
$$15k-14k-16=0$$
$$k-16=0 \Rightarrow k=16$$

مثال: بإستخدام قاعدة كريمر حل المعادلات الخطية التالية:

$$2x-2y-z-3=0$$
$$4x+5y-2z+3=0$$
$$3x+4y-3z+7=0$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ 5 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 7\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & 7\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}$$
$$=-2(-14+9)+1(35-12)-3(-15+8)=10+23+21=54$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 4 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & 7\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}$$
$$=2(-14+9)+1(28-9)-3(-12+6)=-10+19+18=27$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$
$$=2(35-12)+2(28-9)-3(16-15)=81$$

$$D_o=\begin{vmatrix}2 & -2 & -1\\ 4 & 5 & -2\\ 3 & 4 & -3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$
$$=2(-15+8)+2(-12+6)-1(16-15)=-27$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-1}{D_o} \Rightarrow \frac{x}{54}=\frac{-1}{-27} \Rightarrow -27x=-54 \Rightarrow x=\frac{-54}{-27}=2$$

$$\frac{-y}{D_2}=\frac{-1}{D_o} \Rightarrow \frac{-y}{27}=\frac{-1}{-27} \Rightarrow 27y=-27 \Rightarrow y=-\frac{27}{27}=-1$$

$$\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}\Rightarrow\frac{z}{81}=\frac{-1}{-27}\Rightarrow -27z=-81\Rightarrow z=\frac{-81}{-27}=3$$

مثال: بإستخدام المحددات أوجد قيمة (x) من المعادلات الخطية التالية: $2x+3y-z-4=0$

$3x+y+2z-13=0$

$x+2y-5z+11=0$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}$$

$$D_o=\begin{vmatrix}2&3&-1\\3&1&2\\1&2&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\2&-5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&2\\1&-5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$=2(-5-4)-3(-15-2)-1(6-1)=-18+51-5=28$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&-1&-4\\1&2&-13\\2&-5&11\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&-13\\-5&11\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&-13\\2&11\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&2\\2&-5\end{vmatrix}$$

$$=3(22-65)+1(11+26)-4(-5-4)=-129+37+36=-56$$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-1}{D_o}\Rightarrow\frac{x}{-56}=\frac{-1}{28}\Rightarrow 28x=56\Rightarrow x=\frac{56}{28}=2$$

مثال: بإستخدام المحددات جد قيمة (z) من المعادلات الخطية التالية: $3x-4y+2z+8=0$

$x+5y-3z+2=0$

$5x+3y-z+6=0$

$$\frac{x}{D_1}=\frac{-y}{D_2}=\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}$$

$$D_o=\begin{vmatrix}3&-4&2\\1&5&-3\\5&3&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\1&5\\5&3\end{matrix}=(3\times5\times-1+(-4)\times-3\times5+2\times1\times3)-(5\times5\times2+3\times-3\times3+(-1)\times1\times-4)$$

$$=(-15+60+6)-(50-27+4)=51-27=24$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&-4&8\\1&5&2\\5&3&6\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\1&5\\5&3\end{matrix}=(3\times5\times6+(-4)\times2\times5+8\times1\times3)-(5\times5\times8+3\times2\times3+6\times1\times-4)$$

$$=(90-40+24)-(200+18-24)=74-194=-120$$

$$\frac{z}{D_3}=\frac{-1}{D_o}\Rightarrow\frac{z}{-120}=\frac{-1}{24}\Rightarrow 24z=120\Rightarrow z=\frac{120}{24}=5$$

8-3 خواص المحددات (Properties of Determinants)

1- إذا إحتوت عناصر أي صف أو عمود في محدد ما على عامل مشترك يمكن إخراجه خارج المحدد ويعد عاملاً مضروباً في قيمة المحدد حيث من الممكن إدخال العامل المشترك إلى أي صف أو عمود آخر كما مبين في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & nc_1 \\ a_2 & b_2 & nc_2 \\ a_3 & b_3 & nc_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال: العامل (4) موجود في كل عنصر من عناصر الصف الأول والعامل (3) موجود في كل عنصر من عناصر الصف الثاني.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 12 \left(2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 12[2(0+5) - 1(0+1) - 1(5-2)] = 72$$

2- إذا كانت جميع عناصر أي صف أو عمود صفر فإن قيمة المحدد تساوي صفر كما مبين في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3- في أي محدد إذا تبادل عناصر أي صفين متجاورين أو عمودين متجاورين بالترتيب فإن قيمة المحدد تتغير من موجب إلى سالب وبالعكس كما مبين في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 8 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -72$$

4- إذا كانت عناصر أي صفين أو عمودين متساوية أو مضاعفات لها فإن قيمة المحدد تساوي صفر كما مبين في المثال التالي.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

5- تتساوى قيمة المحدد لمصفوفة معينة مع قيمة محدد مبدلتها.

6- إن إضافة (أو طرح) أي صف (أو عمود) إلى صف (أو عمود) آخر لا يغير من قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

9-3 أسئلة مكملة

1- إحسب قيمة المحددات الآتية:

$$(a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix} \quad (b)\begin{vmatrix}3 & 5 & 7\\ 11 & 9 & 13\\ 15 & 17 & 19\end{vmatrix} \quad (c)\begin{vmatrix}13 & -7\\ -7 & 10\end{vmatrix}$$

2- أوجد قيم x التي تحقق المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix}3x & 1 & 2\\ 4 & 2 & -x\\ 2 & -1 & 3x\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix}-2x & -1\\ -8x & -x\end{vmatrix}=0$$

3- بإستخدام قاعدة كريمر حل المعادلات الخطية التالية:

$$2x-y+3z=1$$
$$3x+2y=2$$
$$-x+z=3$$

4- أوجد قيمة k التي تجعل المعادلات الخطية التالية متطابقة:

$$x+(k+1)y+1=0$$
$$2kx+5y-3=0$$
$$3x+7y+1=0$$

5- بإستخدام قاعدة كريمر أوجد (x,z) من المعادلات الخطية الآتية:

$$3x+2y+2z=-8$$
$$x+5y-3z=-2$$
$$5x+3y-z=-6$$

6- إثبت أن: $(i)\begin{vmatrix}3 & 7 & 2\\ 6 & 8 & 4\\ 1 & 9 & 5\end{vmatrix}=-78 \quad (ii)\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 5 & -2\end{vmatrix}=-23i+7j+6k \quad (iii)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2$

7- بإستخدام المحددات أوجد (x,y) من المعادلات الخطية التالية:

$$4x-3y+20=0$$
$$3x+2y-2=0$$

8- جد قيمة k التي تواؤم المعادلات الخطية التالية:

$$x+y-k=0$$
$$kx-3y+11=0$$
$$2x+4y-8=0$$

9- إختبر موائمة المعادلات الخطية التالية:

$$x+3y=-1$$
$$4x+5y=3$$
$$3x+7y=-1$$

10- حل المعادلة التالية:

$$\begin{vmatrix}x+1 & -5 & -6\\ -1 & x & 2\\ -1 & 2 & x+1\end{vmatrix}=0$$